

DETERMINAÇÃO DE UM NOVO MÉTODO PARA MEDIR A FORÇA EM UMA MÁQUINA DE PADRONIZAÇÃO PRIMÁRIA DE FORÇA POR PESO MORTO INTRODUZINDO O CONCEITO DA FORÇA DE CORIOLIS

Wairy Dias Cardoso ¹, Max Suell Dutra ²

¹ Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial - INMETRO
Av. Nossa Senhora das Graças, 50 - CEP 25250-020 - Xerém – Duque de Caxias - Rio de Janeiro - Brasil
wdcardoso@inmetro.gov.br

² Programa de Engenharia Mecânica-COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro-UFRJ
max@mecanica.coppe.ufrj.br

Resumo: O presente trabalho visa estudar o efeito da força de Coriolis no modelo de uma Máquina de Padronização Primária de Força por Peso Morto com ênfase no quadro de força e o eixo das massas. É uma inovação tecnológica!

Palavras chave: máquina de padronização de força, peso morto, força de coriolis, pêndulo de Foucault, projeto de máquinas, incerteza da medição, calibração.

1. INTRODUÇÃO

Máquina de Padronização Primária de Força por Peso Morto (fig.1) são máquinas que operam através da ação direta das massas no campo gravitacional. A unidade de força é realizada através do princípio de peso morto, cujas forças são geradas por massas suspensas submetidas ao efeito da aceleração da gravidade local [1] [2].

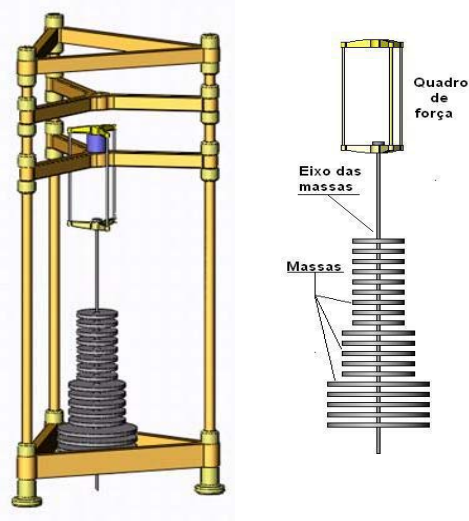


Fig. 1 Estrutura de uma Máquina de Padronização Primária de Força por Peso Morto.

As máquinas de padronização de força por peso morto são utilizadas para quantificar a grandeza força. São estruturas compostas por massas de elevada exatidão e reduzido grau de incerteza submetidas a aceleração da gravidade local.

No início do século dezenove, Gaspard Coriolis desenvolveu um princípio matemático para descrever o movimento de objetos em relação a um sistema de referência não-inercial, em rotação uniforme, tal como a Terra. Seu princípio recebeu o nome de Força de Coriolis.

A força de Coriolis altera os resultados inclusive dependendo da longitude do Laboratório, bem como do comprimento do eixo das massas, para a interpretação dos resultados obtidos.

2. OBJETIVO

O estudo desta nova concepção, além de ser uma inovação tecnológica é importante para melhorar as avaliações feitas em máquinas de padronização primária de força.

É estudado o sistema de coordenadas em movimento generalizado, equação do movimento de uma partícula relativamente a um observador sobre a superfície da Terra, pêndulo de Foucault, e a equação final que determina a nova equação para o modelo com a introdução da força de Coriolis.

A medição da força por uma máquina de peso morto segue a seguinte equação tradicional:

$$F = m_m g_l \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_m} \right) \quad (1)$$

Onde:

F = módulo da força a ser padronizada;
m = módulo das massas dos pesos considerados;
g_l = valor da aceleração da gravidade local;
ρ_a = valor da massa específica do ar, no local da instalação do padrão;
ρ_m = valor da massa específica do material dos pesos considerados.

Em seguida é estudada a medida de força com a introdução da força de Coriolis que não é analisado nas máquinas de calibração primária existente nos Institutos de metrologia no mundo. Portanto em nossa proposta a equação passa a ser.

$$F_R = mg \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_m} \right) - 2m\omega(l_q + l_{ec}) \left[\cos\theta \sin\varphi(\dot{\theta}) + \sin\theta \cos\varphi(\dot{\varphi}) \right] \sin\lambda \quad (2)$$

onde:

F_R = módulo da força resultante a ser padronizada;
 m = módulo das massas dos pesos considerados;
 g_l = valor da aceleração da gravidade local;
 ρ_a = valor da massa específica do ar, no local da instalação do padrão;
 ρ_m = valor da massa específica do material dos pesos considerados;
 ω = velocidade angular de rotação da Terra;
 l_q = comprimento do quadro de força;
 l_{ec} = comprimento do eixo das massas desde o quadro de força até o centro de massa;
 θ = deslocamento angular do eixo das massas em relação ao plano vertical;
 $\dot{\theta}$ = velocidade angular do eixo das massas em relação ao plano vertical;
 φ = deslocamento angular do eixo das massas em relação ao plano horizontal;
 $\dot{\varphi}$ = velocidade angular do eixo das massas em relação ao plano horizontal;
 λ = co-latitudes da posição da máquina de padronização de força.

Com isto, determinamos a diferença entre a posição tradicional e a nossa proposta com a força de Coriolis.

3. METODOLOGIA

3.1 Sistemas de coordenadas em movimento generalizado

Seja \vec{R} o vetor posição da origem Q do sistema xyz, relativamente à origem O do sistema XYZ fixo (ou inercial), Fig. 2, [1] [3] [4] [5].

Portanto, o vetor posição relativamente a O é:

$$\vec{R}_0 = \vec{R} + \vec{r} \quad (3)$$

Assim, a velocidade do ponto P, sob o ponto de vista do sistema de coordenadas XYZ é [1] [3] [4] [5]:

$$\left(\frac{d\vec{R}_0}{dt} \right)_{fixo} = \frac{d}{dt} \left(\vec{R} + \vec{r} \right)_{fixo} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{fixo} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{fixo} \quad (4)$$

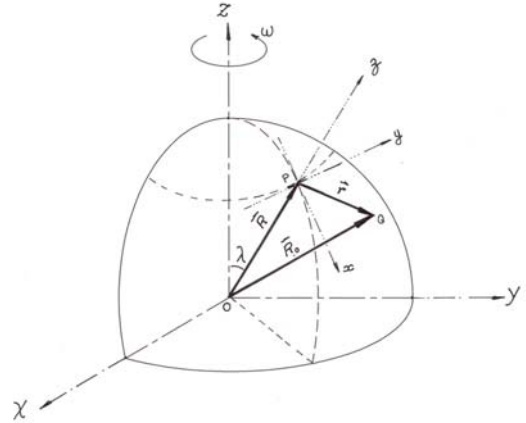


Fig. 2 Octante do desenvolvimento das coordenadas. Portanto, o vetor de posição relativamente a O é:

Assim, a velocidade do ponto P, sob o ponto de vista do sistema de coordenadas XYZ é [1] [3] [4] [5]:

$$\left(\frac{d\vec{R}_0}{dt} \right)_{fixo} = \frac{d}{dt} \left(\vec{R} + \vec{r} \right)_{fixo} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{fixo} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{fixo} \quad (4)$$

Porém, o vetor posição é manifestado pelas componentes de deslocamento e rotação no ponto P, sendo a velocidade da partícula relativa ao sistema fixo.

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{fixo} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{móvel} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5)$$

Logo, conclui-se:

$$\left(\frac{d\vec{R}_0}{dt} \right)_{fixo} = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{fixo} + \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{móvel} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (6)$$

O vetor $\vec{\omega}$ é a velocidade angular do sistema em movimento, relativamente ao sistema fixo. A aceleração do sistema será:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{R}_0}{dt} \right)_{fixo} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_{fixo} + \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{móvel} + \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (7)$$

Portanto, a equação geral do movimento generalizado, determinando a aceleração do vetor posição de P, relativamente ao ponto O é:

$$\left(\frac{d^2 \vec{R}_0}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2}\right) + \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (8)$$

onde os termos da aceleração de Coriolis e a aceleração centrípeta são respectivamente:

$$\text{Aceleração de coriolis: } \vec{a}_{cr} = 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (9)$$

$$\text{Aceleração centrípeta: } \vec{a}_{cp} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (10)$$

3.2 Equação do movimento de uma partícula, relativamente a um observador, sobre a superfície da Terra

Supondo-se que a Terra seja uma esfera regular, com centro em O, girando em torno do eixo Z, com velocidade angular constante ω e usando-se, também, o fato do efeito de rotação da Terra em torno do Sol ser negligenciável, o sistema de coordenadas XYZ pode ser tomado como sistema inercial [1] [3] [4] [5].

Levando-se em conta a equação 8, o vetor força da partícula m, relativamente ao sistema XYZ, é R_0 ; logo:

$$m \frac{d^2 \vec{R}_0}{dt^2} = \vec{F} \quad (11)$$

No caso da Terra, a força é designada pela Lei da Gravitação de Newton.

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{R_0^3} \vec{R}_0 \quad (12)$$

Igualando-se (11) com (12), tem-se:

$$\frac{d^2 \vec{R}_0}{dt^2} = -G \frac{M}{R_0^3} \vec{R}_0 \quad (13)$$

A aceleração centrípeta é a aceleração do ponto Q, relativamente à origem, no ponto O.

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \quad (14)$$

Substituindo-se as equações 13 e 14 na equação 8, considerando-se a aceleração angular igual a zero e a rotação da Terra, constante, obtém-se:

$$-G \frac{M}{R_0^3} \vec{R}_0 = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) + \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}\right) + 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (15)$$

Segundo os estudos de geofísica, considera-se a aceleração da gravidade:

$$\vec{g} = -\frac{GM}{R_0^3} \vec{R}_0 - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \quad (16)$$

Substituindo-se a equação 16 na equação 15, tem-se a equação que determina a aceleração, perto da superfície da Terra:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (17)$$

Perto da superfície da Terra, o último termo pode ser negligenciado, com um alto grau de aproximação, tomando a forma:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (18)$$

onde escreve-se:

$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \left(\dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k} \right) \quad (19)$$

Substituindo a equação 19 na equação 18, têm-se:

$$(20)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -g \vec{k} - 2\omega \cos \lambda \dot{y} \vec{i} - 2(\omega \cos \lambda \dot{x} + \omega \sin \lambda \dot{z}) \vec{j} - 2\omega \sin \lambda \dot{y} \vec{k}$$

Tomando-se as parcelas correspondentes aos vetores unitários, que são as acelerações nos devidos eixos coordenados para partículas que se movem muito perto da superfície da Terra:

$$\ddot{x} = 2\omega \cos \lambda \dot{y} \quad (21)$$

$$\ddot{y} = -2\omega(\cos \lambda \dot{x} + \sin \lambda \dot{z}) \quad (22)$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega \sin \lambda \dot{y} \quad (23)$$

Estas são as equações do movimento quando o corpo considerado se move perto da superfície da Terra.

Sendo:

• • •

x, y, z , as acelerações no eixo considerado;

• • •

$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, as velocidades no eixo considerado;

g , o valor da aceleração local na Terra;

ω , a velocidade angular da Terra;

λ , a colatitude do objeto na Terra.

3.3 Determinação da força no conjunto quadro de força e eixo das massas tendo em conta o efeito de Coriolis

Deve-se achar a equação do movimento do pêndulo, levando em conta a rotação da Terra que, no caso da Máquina de Padronização Primária de Força, por Peso Morto, é considerada constante [1] [3] [4] [5] [6].

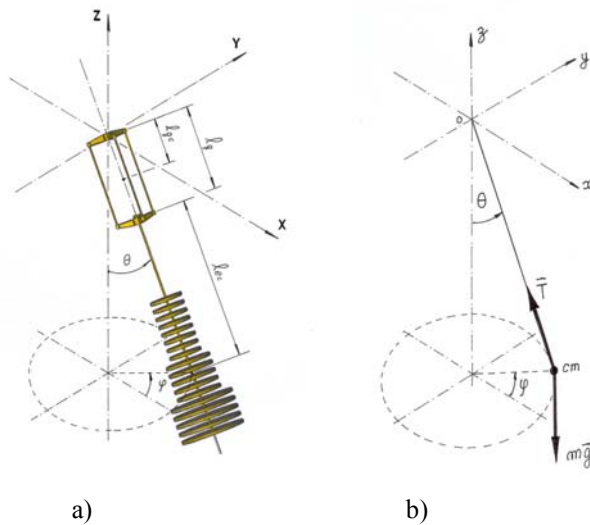


Fig.2 Representação do conjunto: a) quadro de força, eixo das massas e as massas do sistema como Pêndulo de Foucault, b) peso resultante e força de tração no eixo das massas aplicado no centro de massa no pêndulo de Foucault.

O pêndulo de Foucault é um pêndulo destinado a evidenciar o movimento de rotação da Terra e baseia-se na invariabilidade do plano de oscilação de um pêndulo. Em nosso caso em particular, o modelo proposto sofre a influência da força de Coriolis comportando-se como um pêndulo de Foucault, alterando desta forma o valor esperado da força de referência gerada por uma máquina de padronização [6] [7] [8].

Onde:

\vec{T} = força de tração aplicada no centro de massa, do eixo das massas;

$m \vec{g}$ = peso resultante das massas, aplicado no eixo das massas;

θ = deslocamento angular do eixo das massas em relação ao plano vertical;

φ = deslocamento angular do eixo das massas em relação ao plano horizontal;

l_q = comprimento do quadro de força;

l_{ec} = comprimento do eixo das massas em relação ao centro de massa.

As coordenadas do centro de massa, situadas no eixo das massas, em relação à origem, serão:

$$x_{ec} = (l_q + l_{ec}) \sin \theta \cos \varphi \quad (24)$$

$$y_{ec} = (l_q + l_{ec}) \sin \theta \sin \varphi \quad (25)$$

$$z_{ec} = (l_q + l_{ec}) \cos \theta \quad (26)$$

As componentes da força T(fig. 2.b) aplicada ao sistema, tomam a forma:

$$T_x = -T \sin \theta \cos \varphi \quad (27)$$

$$T_y = -T \sin \theta \sin \varphi \quad (28)$$

$$T_z = T \cos \theta \quad (29)$$

A resultante das forças no centro de massa é:

$$\vec{R}_{cm} = \vec{T} + m \vec{g} \quad (30)$$

A equação dinâmica para o sistema incluindo a força de Coriolis e a força centrípeta, será:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{R}_{cm} - 2m\omega \times \frac{d \vec{r}}{dt} - m\omega \times (\omega \times \vec{r}) \quad (31)$$

Substituindo-se a equação 10.28 na equação 10.29:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{T} + m \vec{g} - 2m\omega \times \frac{d \vec{r}}{dt} - m\omega \times (\omega \times \vec{r}) \quad (32)$$

Desconsiderando-se o último termo da força centrípeta:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{T} + m \vec{g} - 2m\omega \times \frac{d \vec{r}}{dt} \quad (33)$$

Escrevendo-se na forma de suas componentes:

$$m \ddot{x} = -T \sin \theta \cos \varphi + 2m\omega \dot{y} \cos \lambda \quad (34)$$

$$m \ddot{y} = -T \sin \theta \sin \varphi - 2m\omega (\dot{x} \cos \lambda + \dot{z} \sin \lambda) \quad (35)$$

$$m \ddot{z} = -T \cos \theta - mg + 2m\omega \dot{y} \sin \lambda \quad (36)$$

Substituindo-se os valores das velocidades obtidas das equações de centro de massa 24,25 e 26 nas equações 34,35 e 36, obtêm-se um sistema de equações, que determinam o comportamento dinâmico do pêndulo de Foucault:

$$m\ddot{x} = T \sin \theta \cos \varphi + 2m\omega(l_q + l_{ec}) \left[\cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi} \right] \cos \lambda \quad (37)$$

$$m\ddot{y} = -T \sin \theta \sin \varphi - 2m\omega(l_q + l_{ec}) \left[\cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} - \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi} \right] \cos \lambda + \sin \theta \dot{\varphi} \sin \lambda \quad (38)$$

$$m\ddot{z} = -T \cos \theta - mg + 2m\omega(l_q + l_{ec}) \left[\cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi} \right] \sin \lambda \quad (39)$$

Da equação 39, que representa a ação das forças verticais em relação ao plano considerado horizontal, obtêm-se a seguinte representação:

$$T \cos \theta - m\ddot{z} = mg - 2m\omega(l_q + l_{ec}) \left[\cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi} \right] \sin \lambda \quad (40)$$

Fazendo-se $F_R = T \cos \theta - m\ddot{z}$, como a força resultante no eixo z, e substituindo-se o valor de mg da equação 40

por seu valor, $mg_l \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_m} \right)$, na equação 1, obtém-se

uma equação para o estudo da força aplicada na máquina de padronização primária de força, levando-se em conta a força de Coriolis:

$$F_R = mg_l \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_m} \right) - 2m\omega(l_q + l_{ec}) \left[\cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} + \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi} \right] \sin \lambda \quad (41)$$

4. RESULTADOS

Através do estudo do modelo de uma máquina de calibração de força de 2 kN é apresentada a comparação dos resultados das medições da força pelo modelo de uma Máquina de Padronização Primária de Força por Peso Morto da maneira convencional e a obtida, pelo novo modelo onde foi introduzida a força de coriolis.

Considerando-se na equação 40, o valor de $\theta = 0^\circ$, tem-se $\cos \theta = 1$, $\sin \theta = 0$. Portanto, a aceleração vertical é igual a zero ($\ddot{z} = 0$) e a velocidade angular do eixo das massas, em relação ao plano vertical, também é zero ($\dot{\theta} = 0$); a equação então, reduz-se ao seu valor habitual, sem o termo da força de Coriolis:

$$T = mg_l \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_m} \right)$$

Essa equação é idêntica à equação 1, usada para a Máquina de Padronização Primária de Força por Peso Morto, sem a força de Coriolis. Esta conclusão é importante, pois mostra que se o valor da força de Coriolis não for considerado voltamos ao sistema tradicional para o cálculo da força.

Na Tab. 2, ao usarmos a equação 41, observa-se que as co-latitudes de 55° e 85° , são as que possuem o menor valor para a força de Coriolis. Já para as co-latitudes de 30° , 55° e 80° tem-se os maiores valores para a força de Coriolis que possuem ordem de grandeza de 10^{-4} . Na co-latidade de 0° , a força de Coriolis é igual a zero. Logo, existe uma parcela variável da força de Coriolis cuja validade deve ser analisada para cada localidade.

Tab.2 Valores da força de Coriolis em função da co-latidade, para a simulação do modelo.

co-latidade (°)	Força Coriolis (N)
0	0.00E+00
5	4.68E-04
10	2.65E-04
15	3.17E-04
20	4.45E-04
25	6.46E-05
30	4.82E-04
35	2.09E-04
40	3.63E-04
45	4.15E-04
50	1.28E-04
55	4.88E-04
60	1.49E-04
65	4.03E-04
67	4.17E-04
70	3.77E-04
75	1.89E-04
80	4.85E-04
85	8.59E-05
90	4.36E-04

Na equação 41, ao se variar o comprimento do eixo das massas, obtemos os resultados da Tab. 1 onde fica evidente que o tamanho do eixo, influencia o valor da força de Coriolis.

Tab.1 Valores da força de Coriolis em função do comprimento do eixo das massas

lec(m)	Força Coriolis (N)
1	3.48E-04
2	5.80E-04
3	8.11E-04
4	1.04E-03
5	1.28E-03
6	1.51E-03
7	1.74E-03
8	1.97E-03
9	2.20E-03
10	2.43E-03

5. DISCUSSÃO

A co-latidade é um dos fatores para ser analisado pois dependendo da posição geográfica do laboratório teremos calibrações de força com resultados diferentes, significativos ou não, em comparações internacionais.

Na fig.3, observa-se a variação da força de Coriolis, em função da co-latidade.

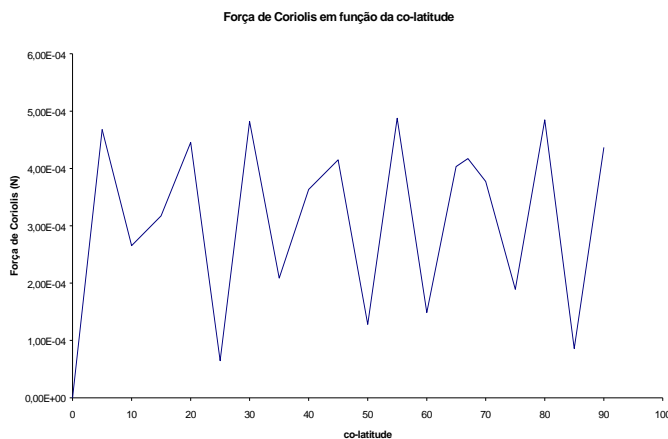


Fig. 3 Força de Coriolis em função da co-latidade, para a simulação do modelo

Com esta constatação, torna-se necessário que os laboratórios que fazem calibração, e os institutos de metrologia que realizam comparações internacionais, façam o devido ajuste na correção dos valores obtidos em seus transdutores primários de força, para obter a exatidão que se espera

A análise da figura 4 mostra que quanto maior o eixo das massas, maior o valor da força de Coriolis, portanto, a máquina de grande porte cujo eixo pode ter um comprimento considerável, terá o valor da força de Coriolis grande o suficiente para aumentar a incerteza da medição, logo, o estudo desta aumentará a exatidão do sistema em questão.

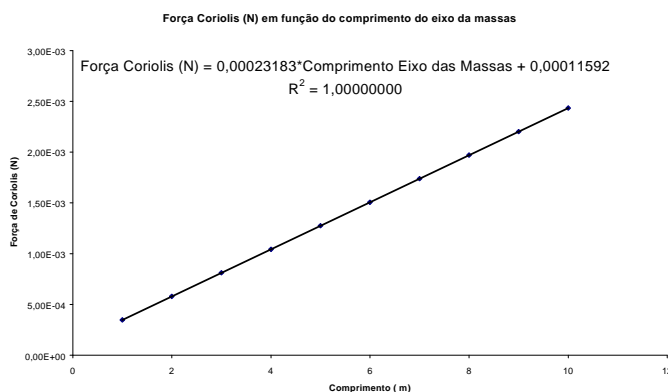


Fig. 4 Força de Coriolis em função do comprimento do eixo das massas

O comprimento do eixo das massas, em função do modelo estudado, fornecerá informações sobre o comportamento da variação da força de Coriolis e o quanto isso representa nas avaliações das medições de força.

6. CONCLUSÕES

Portanto é relevante o estudo da influência da força de coriolis no sistema, uma vez que este efeito não é levado em consideração pelos laboratórios internacionais de calibração de força para as Máquinas de Padronização Primária de Força por Peso Morto.

Estuda-se agora, uma máquina com efeito dinâmico e não como antes, uma máquina inercial.

A análise nos mostra que quanto maior o eixo das massas, maior o valor da força de Coriolis, portanto, a máquina de grande porte cujo eixo pode variar em comprimento, terá o valor da força de Coriolis grande o suficiente para aumentar a incerteza da medição, portanto, o estudo desta aumentará a exatidão do sistema em questão.

A co-latidade e o comprimento do eixo das massas, em função do modelo estudado, irão nos dizer o comportamento do efeito pendular e, o quanto representa nas avaliações das medições de força.

Foi relevante o estudo da influência da força de Coriolis no sistema, uma vez que este efeito não é levado em consideração pelos laboratórios internacionais de calibração de força.

É uma inovação tecnológica em função das máquinas existentes que pode trazer grandes benefícios na área de medição de força.

REFERÊNCIAS

- [1] Cardoso, W. D., *Modelagem de uma Máquina de Padronização de Força por Peso Morto considerando o efeito de Coriolis*, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE / UFRJ, Rio de Janeiro, 2008.
- [2] A. Bray Ray, G. Barbato and R. Levi : *Theory and practice of force measurement*, London, Academic Press Limited, 1990.
- [3] Coriolis, G.G., *Mémoire sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs des machines*. Journal de l'école Polytechnique, 1832
- [4] Coriolis, G.G., *Mémoire sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps*. Journal de l'école Polytechnique, 1835
- [5] Ansermet, J., *La Mécanique Rationnelle*, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, 2005.
- [6] Denise S.D. Stilling and Walerian Szyszkowski: *Controlling angular oscillations through mass reconfiguration: a variable length pendulum case*. University of Saskatchewan, Canada : 2001
- [7] U. Das , B. Talukadar and J. Shamanna: *Indirect analytic representation of Foucault Pendulum* .Czechoslovak Journal of Physics, vol52, n12, 2002
- [8] Miroslav Parady: *Bound Motion of Bodies and Particles in the Rotating Systems* .International Journal of Theoretical Physics , vol.46, n 4, abril de 2007